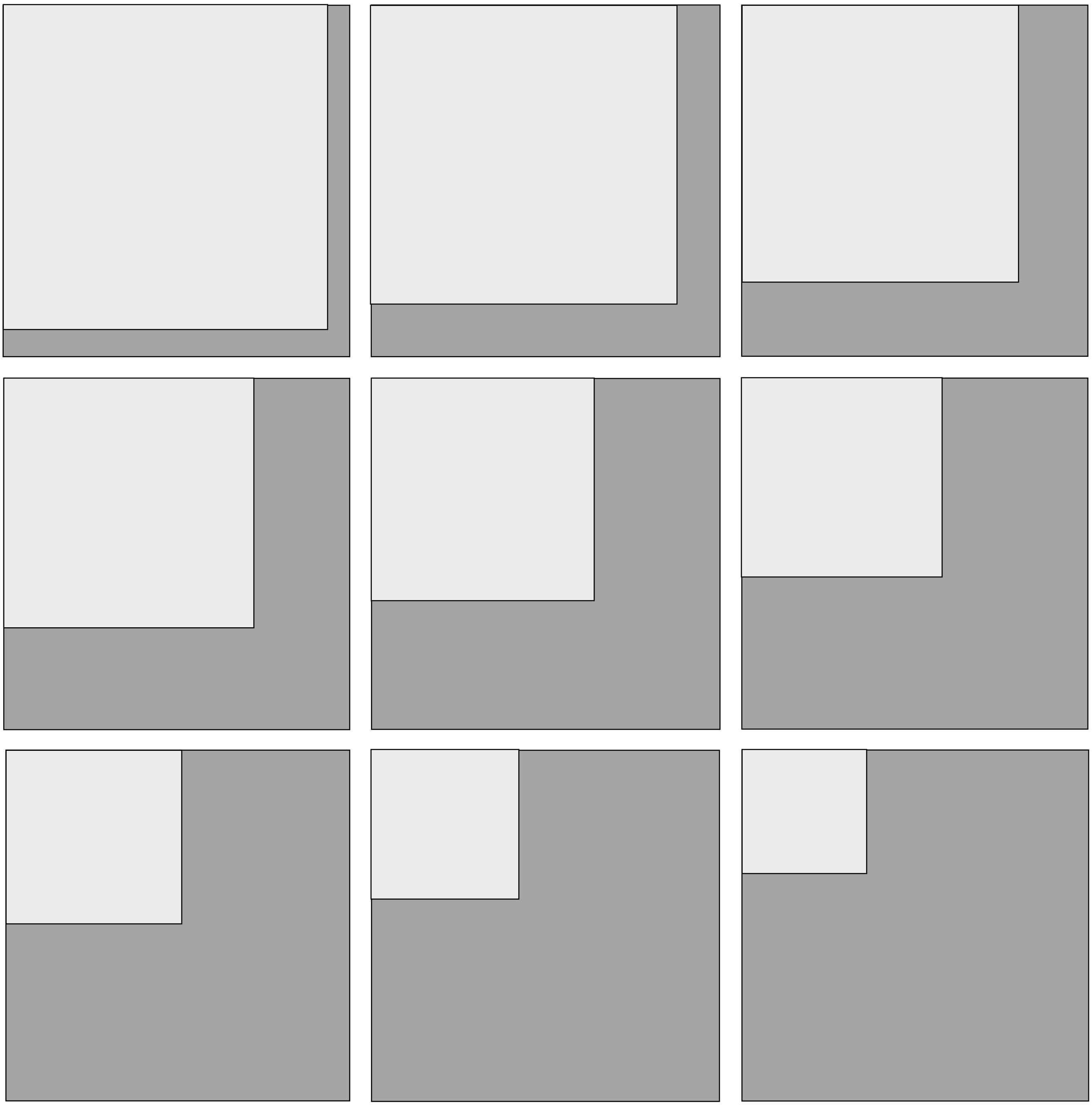
Colégio Bandeirantes



Matemática

Fascículo 02

Manoel Benedito Rodrigues

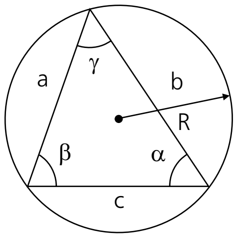
Índice

Geometria Plana

Resumo Teórico

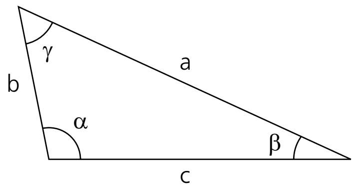
Principais Fórmulas

Lei dos Senos



$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\gamma} = 2R$$

Lei dos Cossenos

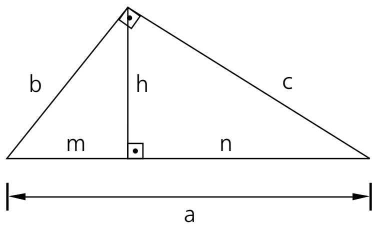


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

Relações Métricas no Triângulo Retângulo

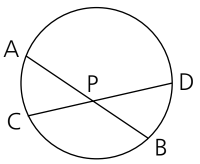


$h^2 = m \cdot n$ $\qquad$ $b \cdot c = a \cdot h$

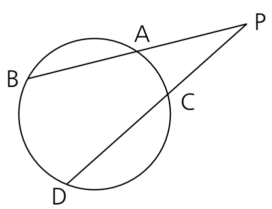
$b^2 = a \cdot m$ $\qquad$ $a^2 = b^2 + c^2$

$c^2 = a \cdot n$

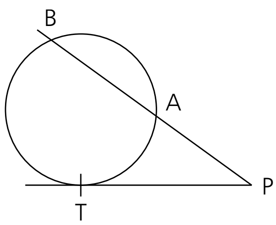
Relações Métricas no Círculo



$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

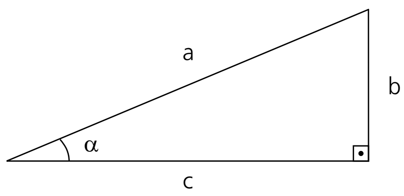


$PA \cdot PB = PC \cdot PD$



$(PT)^2 = PA \cdot PB$

Razões Trigonométricas



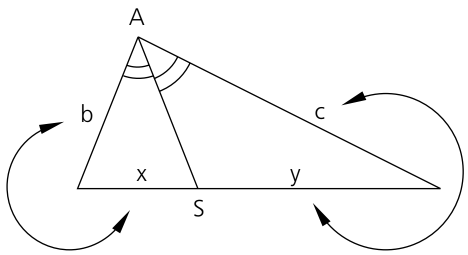
$$\text{sen}\ \alpha = \frac{b}{a},\ \cos\alpha = \frac{c}{a}\ \text{e}\ \text{tg}\ \alpha = \frac{b}{c}$$

Polígonos Convexos

Sendo $n =$ número de lados;
$d =$ número de diagonais;
$S_i =$ soma dos ângulos internos e
$S_e =$ soma dos ângulos externos,

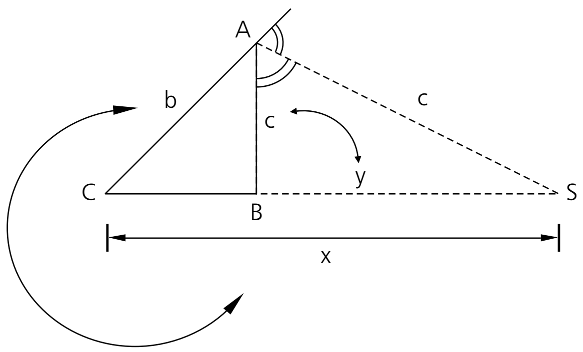
temos: $d = \frac{n(n-3)}{2}$ $\quad S_i = (n-2) \cdot 180^o$ $\quad$ e $\quad S_e = 360^o$

Teorema da Bissetriz Interna



$$\frac{b}{x} = \frac{c}{y}$$

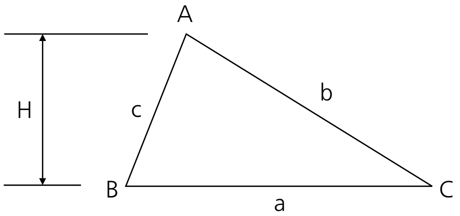
Teorema da Bissetriz Externa

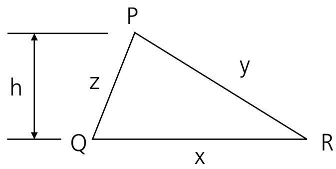


$$\frac{b}{x} = \frac{c}{y}$$

Semelhança de Triângulos

Sendo **k** a razão de semelhança entre os ΔABC e ΔPQR, temos:

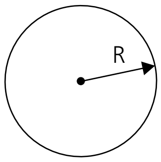


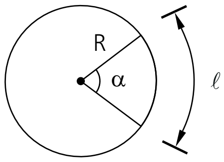


$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \frac{H}{h} = k$$

$$\frac{\text{Área } \Delta ABC}{\text{Área } \Delta PQR} = k^2$$

Comprimento da Circunferência





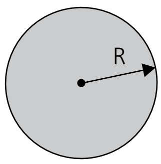
$C = 2\pi R$

α em graus: $\ell = \dfrac{\alpha}{360^\circ} \cdot (2\pi R)$

α em radianos: $\ell = \alpha R$

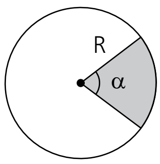
Áreas

Círculo



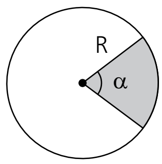
$A = \pi \cdot R^2$

Setor Circular



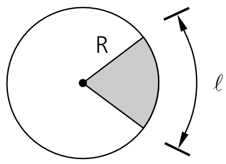
$A = \dfrac{\alpha \cdot \pi \cdot R^2}{360^\circ}$

α em graus



$A = \dfrac{\alpha \cdot R^2}{2}$

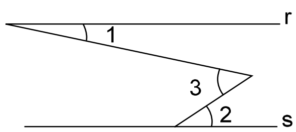
α em radianos



$A = \dfrac{\ell \cdot R}{2}$

Exercícios

01. Na figura, as retas r e s são paralelas, o ângulo 1 mede 45º e o ângulo 2 mede 55º. A medida, em graus, do ângulo 3 é:



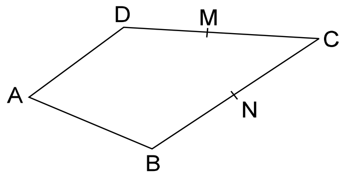
a. 50
b. 55
c. 60
d. 80
e. 100

02. Considere um arco $\overset{\frown}{AB}$ de 110º numa circunferência de raio 10 cm. Considere, a seguir, um arco $\overset{\frown}{A'B'}$ de 60º numa circunferência de raio 5cm. Dividindo–se o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ pelo do arco $\overset{\frown}{A'B'}$ (ambos medidos em cm), obtém–se

a. $\frac{11}{6}$
b. 2
c. $\frac{11}{3}$
d. $\frac{22}{3}$
e. 11

03. No quadrilátero ABCD abaixo, $A\hat{B}C = 150º$, AD = AB = 4 cm, BC = 10 cm, MN = 2 cm, sendo M e N, respectivamente, os pontos médios de CD e BC. A medida, em cm^2, da área do triângulo BCD é:

a. 10
b. 15
c. 20
d. 30
e. 40

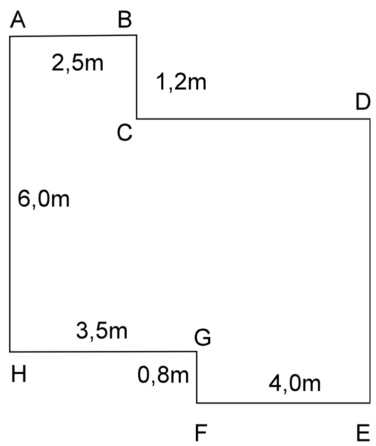


04. O triângulo ABC está inscrito numa circunferência de raio 5cm. Sabe–se que A e B são extremidades de um diâmetro e que a corda BC mede 6 cm. Então a área do triângulo ABC, em cm^2, vale

a. 24
b. 12
c. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$
d. $6\sqrt{2}$
e. $2\sqrt{3}$

05. A figura mostra a planta baixa da sala de estar de um apartamento. Sabe–se que duas paredes contíguas quaisquer incidem uma na outra perpendicularmente e que AB = 2,5m, BC = 1,2m, EF = 4,0m, FG = 0,8m, HG = 3,5m e AH = 6,0m. Qual a área dessa sala em metros quadrados?

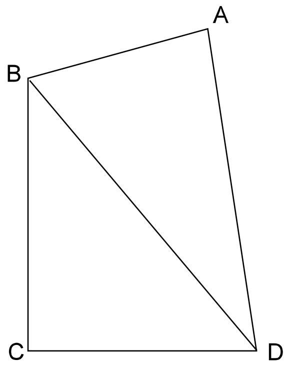
a. 37,2
b. 38,2
c. 40,2
d. 41,2
e. 42,2



06. Do quadrilátero ABCD da figura, sabe–se que: os ângulos internos dos vértices A e C são retos; os ângulos CDB e ADB medem, respectivamente, 45º e 30º; o lado CD mede 2dm.

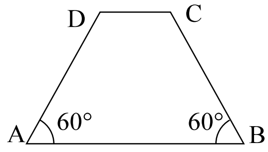
Então os lados AD e AB medem, respectivamente, em dm:

a. $\sqrt{6}$ e $\sqrt{3}$
b. $\sqrt{5}$ e $\sqrt{3}$
c. $\sqrt{6}$ e $\sqrt{2}$
d. $\sqrt{6}$ e $\sqrt{5}$
e. $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$



07. Na figura ao lado têm-se $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$, AB = 6cm, AD = 4 cm e os ângulos internos de vértices A e B têm as medidas indicadas. A área do quadrilátero ABCD, em centímetros quadrados, é

a. $\sqrt{3}$
b. $2\sqrt{3}$
c. $4\sqrt{3}$
d. $6\sqrt{3}$
e. $8\sqrt{3}$



Dicas

01. Prolongue um dos segmentos entre as paralelas de forma a obter um triângulo.

Use o fato de ângulos alternos entre paralelas serem congruentes.

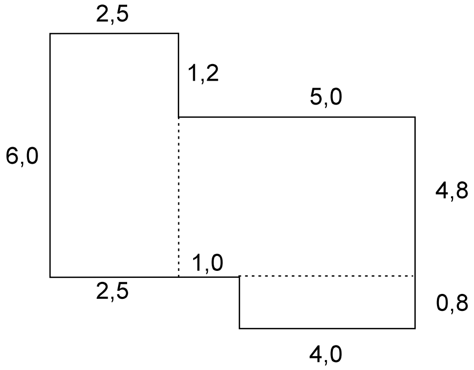
02. Se para 360º (uma "volta completa") em torno da circunferência, é percorrida uma distância igual a $2\pi R$, onde R é o raio da circunferência, qual seria a distância percorrida correspondente a 110º?

03. Teorema: O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e mede a metade da medida do terceiro lado.

04. Use o fato de que todo triângulo inscrito numa semi-circunferência é retângulo.

05. A seguinte figura pode ajudar:

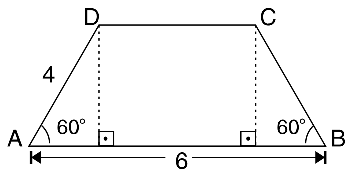
Área do retângulo = base x altura



06. Note que o triângulo BCD é isósceles.

Calcule seus lados e use razões trigonométricas (sen30º, cos30º) no ΔABD.

07. Considere a seguinte figura:



Resoluções

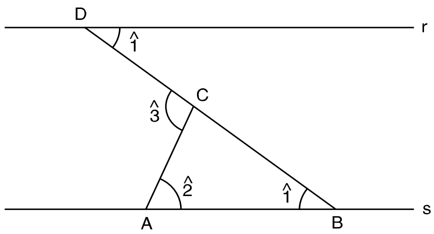
01. Alternativa e.

1. $D\hat{B}A = \hat{D} = \hat{1}$ (alternos internos)
2. ΔABC: $\hat{3}$ é ângulo externo, logo:

$$\hat{3} = \hat{1} + \hat{2}$$

$$\hat{3} = 45^{o} + 55^{o}$$

$$\hat{3} = 100^{o}$$

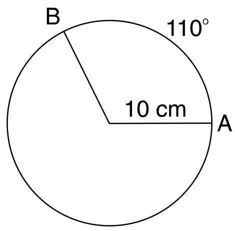


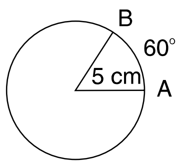
02. Alternativa c.

$$\frac{360^{o}}{2\pi \cdot 10} = \frac{110^{o}}{\overset{\frown}{AB}} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \frac{55\pi}{9}\text{cm}$$

$$\frac{360^{o}}{2\pi \cdot 5} = \frac{60^{o}}{\overset{\frown}{A'B'}} \Rightarrow \overset{\frown}{A'B'} = \frac{5\pi}{3}\text{cm}$$

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{A'B'}} = \frac{\frac{55\pi}{9}}{\frac{5\pi}{3}} = \frac{11}{3}$$





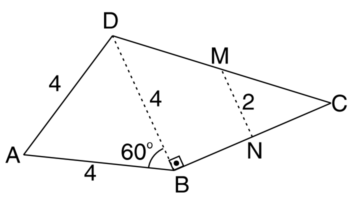
03. Alternativa c.

1. $\left.\begin{array}{l}\text{M ponto médio de } \overline{CD} \\ \text{N ponto médio de } \overline{BC}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{MN} \,//\, \overline{BD};\ BD = 4\text{cm}$

2. $\left.\begin{array}{l}\Delta ADB \text{ é equilátero} \\ A\hat{B}C = 150^{o}\end{array}\right\} \Rightarrow D\hat{B}C = 90^{o}$

3. Sendo A_{BCD} a área do ΔBCD, tem-se:

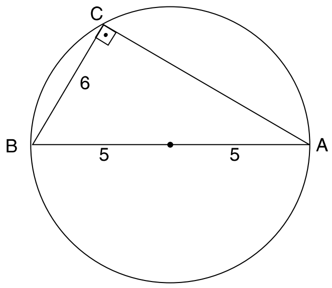
$$A_{BCD} = \frac{(BC)\cdot(BD)}{2} = \frac{10\cdot 4}{2} \Rightarrow A_{BCD} = 20\text{cm}^{2}$$



04. Alternativa a.

1. Se $\overline{AB}$ é diâmetro, o ângulo $\hat{C}$ é reto.
   Logo, pelo teorema de Pitágoras, temos:
   $AC^2 + BC^2 = AB^2$
   $AC^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow AC = 8$ cm

2. $A_{\Delta ABC} = \dfrac{(AC)\cdot(BC)}{2} = \dfrac{8\cdot 6}{2}$ $\quad A_{\Delta ABC} = 24$ cm^2



05. Alternativa e.

1.a resolução:

$A_I = 6 \cdot 2{,}5 = 15$ m^2

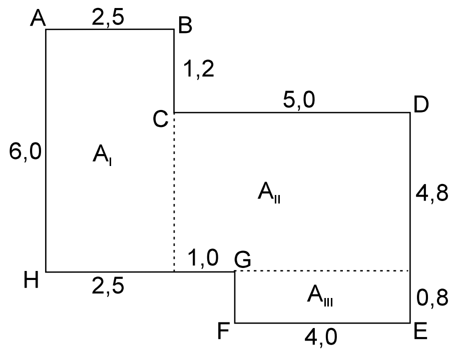
$A_{II} = 5 \cdot 4{,}8 = 24$ m^2

$A_{III} = 4 \cdot 0{,}8 = 3{,}2$ m^2

A_T: área total

$A_T = A_I + A_{II} + A_{III}$

$A_T = 15 + 24 + 3{,}2 \Leftrightarrow AT = 42{,}2$ m^2



2.a resolução:

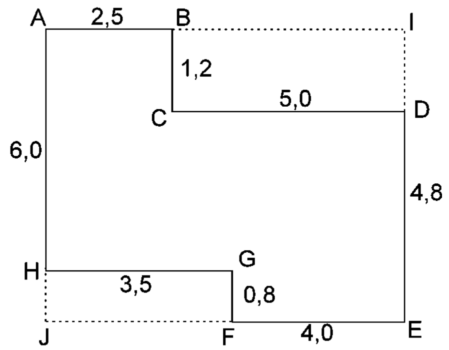
Área A I E J = $7{,}5 \cdot 6{,}8 = 51$m^2

Área B C D I = $1{,}2 \cdot 5 = 6$ m^2

Área F G H J = $0{,}8 \cdot 3{,}5 = 2{,}8$ m^2

Área da sala ABCDEFGH =

$51 - 6 - 2{,}8 = 42{,}2$ m^2

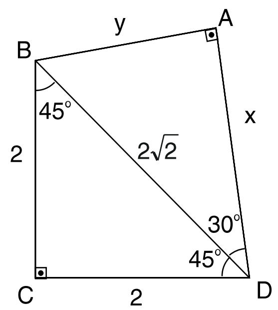


06. Alternativa c.

1. ΔBCD
   $\hat{B} = 45^o \Rightarrow BC = 2$ dm
   $BD^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow BD = 2\sqrt{2}$

2. ΔBCD
   $\cos 30^o = \dfrac{x}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{x}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \sqrt{6}$ dm

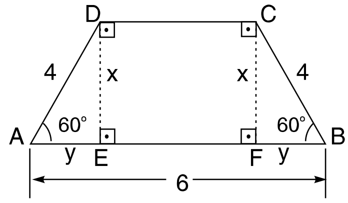
   $\text{sen } 30^o = \dfrac{y}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{y}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow y = \sqrt{2}$ dm



07. Alternativa e

Consideremos E e F as projeções dos vértices D e C, nesta ordem, sobre a base AB do trapézio ABCD.

Temos:



1. ΔADE é congruente ao ΔBCF, pelo caso LAA_o.

Logo, ABCD é trapézio isósceles

2. No triângulo ADE:

$\text{sen } 60^o = \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{4} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3} \text{ cm}$

$\cos 60^o = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{4} \Leftrightarrow y = 2 \text{ cm}$

3. $AB = 6 \Rightarrow 2y + EF = 6 \Leftrightarrow 2 \cdot 2 + EF = 6 \Leftrightarrow EF = 2 \text{ cm} = CD$

4. Seja A a área do trapézio ABCD

$A = \frac{(AB + CD) \cdot DE}{2} \Rightarrow A = \frac{(6 + 2) \cdot 2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow A = 8\sqrt{3} \text{ cm}^2$